MKT eta ZKH o el algoritmo de Aitor

(dedicado a Txomin, mi maestro)

Goyo Lekuona

Colegio La Salle - Legazpi de Zumarraga.

A la derecha, Goyo Lekuona, durante la entrega de premios de la Primera edición del concurso para la mejor Unidad Didáctica de "Profesores innovadores"

Bajo estas extrañas siglas se esconden el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo (son sus siglas en euskara). En este ejemplo quiero ilustrar como los alumnos actuales deben conocer los medios de los que disponen para facilitarles su labor. De igual manera que si ahora me piden ir a Madrid, no se me ocurriría montarme en un burro y hacer el viaje, ¿por qué a los alumnos se les sigue pidiendo que utilicen métodos de tiempos pasados? ¿No deberían dominar y utilizar, de manera adecuada por supuesto, las herramientas que la sociedad les proporciona?

Hay un error extendido que consiste en decir que mediante el uso de las nuevas tecnologías, la hoja de cálculo en este caso, los alumnos aprenden matemáticas. No. Los alumnos aprenden matemáticas y luego utilizan las herramientas de las que disponen para hacer más cómodo ese trabajo. Pero, repito, primero ellos deben aprender los conceptos matemáticos, deben interiorizar los procesos, y una vez realizado ese paso, pueden ayudarse del ordenador o la calculadora para trabajar más cómodamente.

Lo cuento mediante un ejemplo. Este año, trabajando el mínimo común múltiplo y el máximo común denominador, primero repasamos como les han ido contando durante los diferentes cursos su cálculo. Primeramente lo hacían mediante listas de múltiplos o divisores, según el caso, para luego ir comprobando cuales eran comunes a las diferentes listas.

Y una vez localizados los comunes, elegir el mínimo o el máximo según fuese lo pedido.

Veámoslo en la práctica. Si les pedimos a los alumnos que calculen el mcm y el MCD entre 6 y 15, la primera forma de abordar el trabajo que ven los alumnos es realizando una serie de múltiplos para cada uno de los valores. Esto es, crearían dos listas una con los múltiplos del 6

6 12 18 24 30 36 42
48 54 60 66 72 78 84 …

y otra con los múltiplos del 15

15 30 45 60 75 90 105
120 135 150 165 180 195…

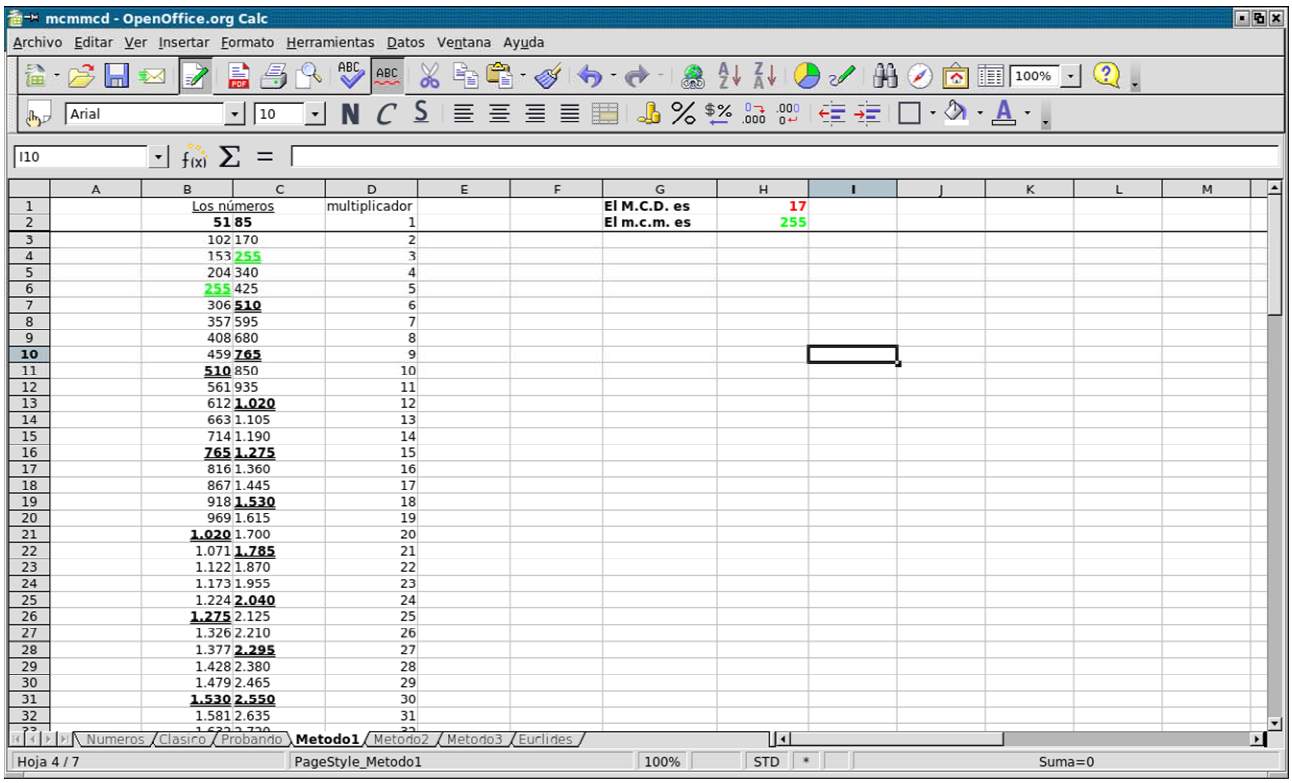
Una vez concluida la primera tarea, el problema consiste en comprobar que valores aparecen repetidos en las dos listas, de manera que así identificaríamos a los múltiplos comunes. En este caso tendríamos los valores 30 y 60. Y entre ellos el mínimo común múltiplo será el 30

Ahora ya podemos pasar a la segunda de las preguntas. Hallar el máximo común divisor. Para ello procedemos de forma análoga. Creamos una lista con los divisores de cada uno de los números, de manera que nos quedarían, para el 6, 6 3 2 y 1 y para el 15, 15 5 3 y 1. Al igual que lo realizado anteriormente, identificamos los valores comunes a las dos listas (el 3 y el 1) Y entre los divisores comunes, el máximo es el 3

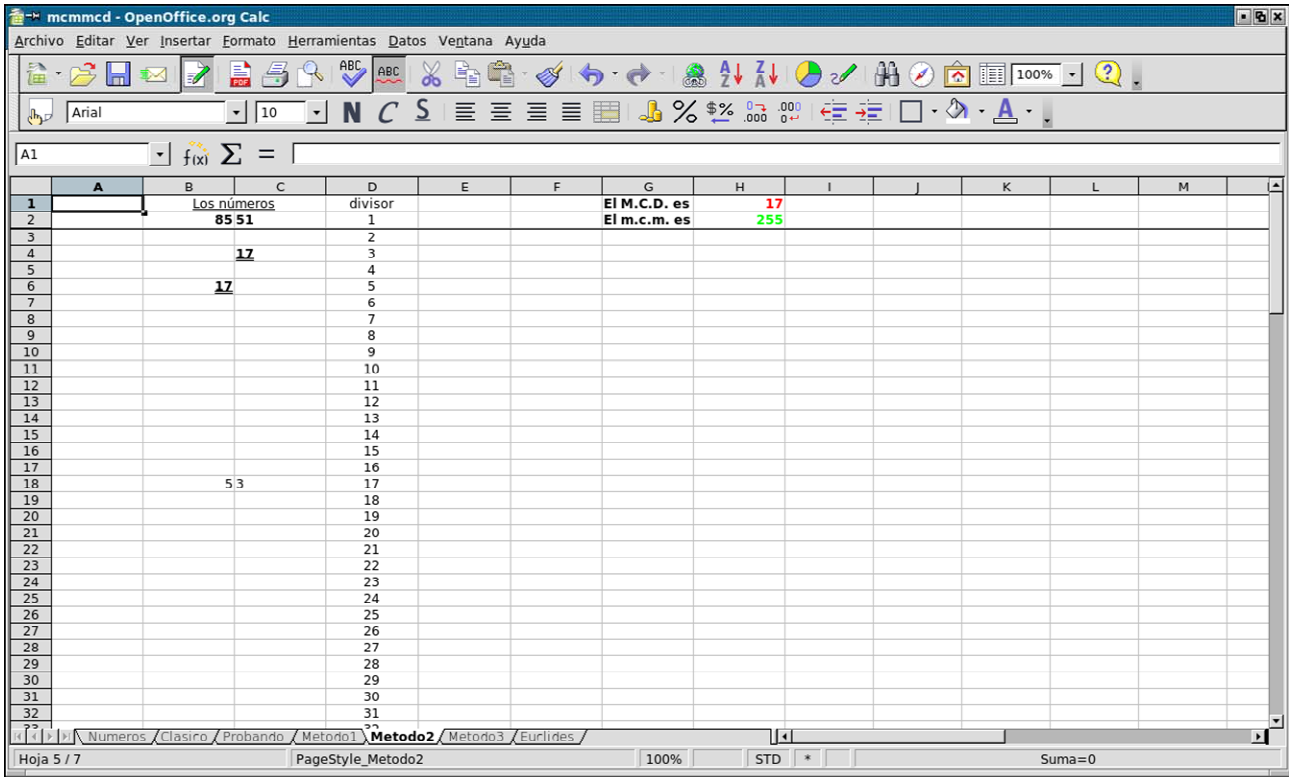
Claro, en cuanto los números se hacen un poco más elevados que los del ejemplo, el asunto ya no es tan sencillo. Confeccionar las listas, y sobre todo identificar los números comunes es una labor considerable, ya que por un lado las operaciones son mas "difíciles" si nos piden calcular el mcm y el MCD entre por ejemplo 51 y 85, las listas deben ser mas largas para detectar los elementos comunes en la mayoría de los casos, y esta labor ya requiere una mayor atención a la hora de analizar los valores. Pero bueno, es una manera. De hecho, como se puede comprobar en el ejemplo colgado en

http://www.elkarrekin.org/web/goyo

Si nos aliamos con la hoja de cálculo, puede ser un buen sistema, ya que es sencillo de entender y el único problema, el trabajo repetitivo, se lo pasamos al ordenador. Y contra mas dominemos el ordenador, mas eficaz se nos puede hacer este sistema, pues contando con el formato condicional, el propio ordenador es capaz de marcarnos los valores repetidos en las dos listas.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Los números		multiplicador			El M.C.D. es	17					
2		51	85	1			El m.c.m. es	255					
3		102	170	2									
4		153	255	3									
5		204	340	4									
6		255	425	5									
7		306	510	6									
8		357	595	7									
9		408	680	8									
10		459	765	9									
11		510	850	10									
12		561	935	11									
13		612	1.020	12									
14		663	1.105	13									
15		714	1.190	14									
16		765	1.275	15									
17		816	1.360	16									
18		867	1.445	17									
19		918	1.530	18									
20		969	1.615	19									
21		1.020	1.700	20									
22		1.071	1.785	21									
23		1.122	1.870	22									
24		1.173	1.955	23									
25		1.224	2.040	24									
26		1.275	2.125	25									
27		1.326	2.210	26									
28		1.377	2.295	27									
29		1.428	2.380	28									
30		1.479	2.465	29									
31		1.530	2.550	30									
32		1.581	2.635	31									



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Los números		divisor			El M.C.D. es	17					
2		85	51	1			El m.c.m. es	255					
3				2									
4			17	3									
5				4									
6		17		5									
7				6									
8				7									
9				8									
10				9									
11				10									
12				11									
13				12									
14				13									
15				14									
16				15									
17				16									
18		5	3	17									
19				18									
20				19									
21				20									
22				21									
23				22									
24				23									
25				24									
26				25									
27				26									
28				27									
29				28									
30				29									
31				30									
32				31									

Pero bueno. Posteriormente se les enseña a calcularlo mediante la descomposición en factores primos. También es un sistema sencillo, pero en cuanto aparecen factores primos elevados es difícil darse cuenta y se complica mucho la resolución. De manera que nuevamente estamos ante un caso "sencillo" con los ejemplos preparados al efecto, pero si intentamos aplicarlo sobre números al azar, el asunto puede no ser tan sencillo.

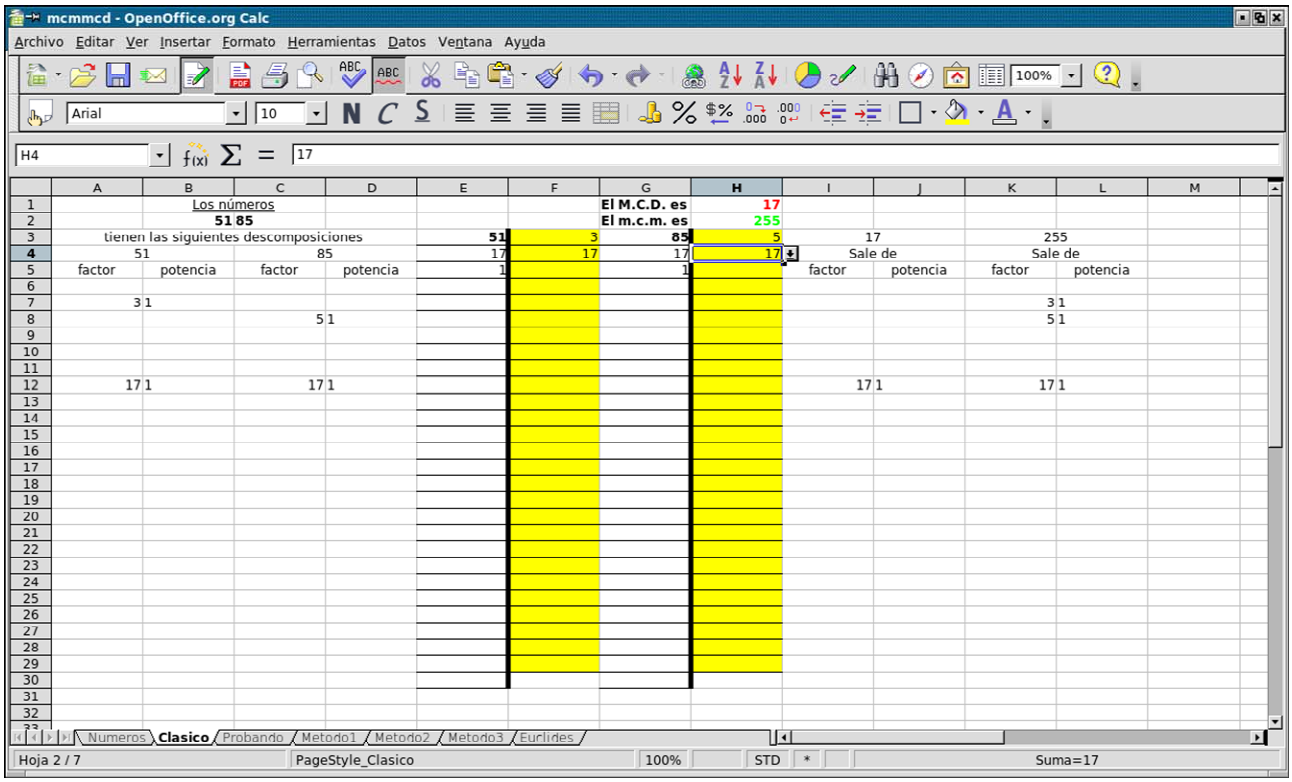
De nuevo lo analizamos con un ejemplo.

Ahora nos piden calcular el mcm y el MCD entre 85 y 51. Con el sistema de las listas es largo, de manera que vamos a trabajarlo mediante la descomposición en factores primos.

Este trabajo tiene únicamente dos pegas, hacer las divisiones e identificar los números primos.

Si la primera dificultad se supone superada (no creo que sea mucho pedir realizar las divisiones enteras para comprobar si el resto es cero) la identificación de los números primos no es tan sencilla sobre todo cuando los valores están mas allí de los típicos 2, 3, 5, 7, 11, 13... expresado mediante una sencilla pregunta, ¿es primo 331? ¿y 539?

Pero bueno, como este también es de los típicos ejemplos preparados para clase, los factores primos que componen los números no son muy grandes, de manera que los alumnos no tienen mucha dificultad en calcular sus descomposiciones factoriales. Y ellos enseguida nos dicen que 85 es 5∗17 y la descomposición factorial de 51 es 3∗17, de manera que recordando que para calcular el Máximo Común Divisor debo tomar los factores comunes a su mínimo exponente, ya tengo que el MCD es 17. Para el mínimo común múltiplo debo tomar los factores comunes y no comunes a su máximo exponente, resulta que el mcm me sale de multiplicar 17∗5∗3 = 255



Este sistema tiene considerables ventajas respecto al anterior. Además me sirve para enseñarles que la multiplicación de los dos números es igual al producto del mcm por el MCD, lo cual supone un gran avance, ya que me basta con calcular uno de los valores y el segundo lo saco a partir de una sencilla multiplicación y división. Es fácil demostrarlo.

Todos los factores no comunes se incluyen en el mcm, y de los comunes uno se incluye en el MCD y el otro en el mcm. De manera que todos los factores están incluidos. Lo explico con un ejemplo. Sean X e Y cuyas descomposiciones factoriales son

$$X = a^m * b^n * c^{ñ} \quad \text{y la segunda,}$$

$$Y = a^r * b^n * d^s$$

Tenemos el factor b^n que se repite, de manera que una de sus apariciones va al MCD y la otra al mcm. Entre a^m y a^r el mayor de ellos va al mcm y el menor al MCD. Y los factores $c^{ñ}$ y d^s al ser no comunes van directamente al mcm. Con lo cual nos queda que

$$X*Y = (a^m * b^n * c^{ñ}) * (a^r * b^n * d^s)$$

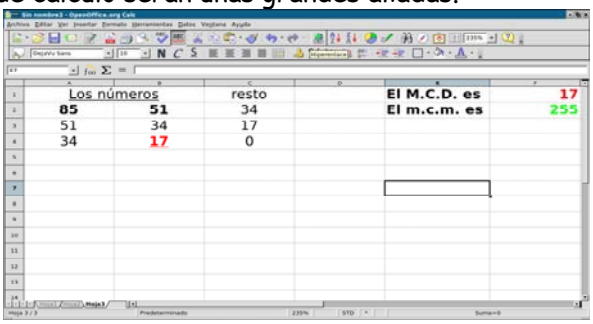
$$mcm * MCD = (a^m * b^n * c^{ñ} * d^s) * (a^r * b^n)$$

Que como se puede deducir tienen igual resultado.

Pero bueno, seguimos teniendo el problema de identificar los números primos que es el que hace que el sistema, con números elegidos al azar, no sea tan eficiente. De manera que llegados a este punto vuelvo a meter en clase a mis amigos los clásicos griegos. En este caso a Euclides y su algoritmo.

Sencillo de entender y sencillo de implementar. La única objeción es la cantidad de operaciones que debemos realizar. Pero por suerte para los alumnos disponemos de mucho mejores medios, y esto no debería ser un obstáculo.

El algoritmo de Euclides se basa en dividir el mayor de los dos números entre el menor, y comprobar el resto. Si es 0, está claro que el menor es divisor del primero. Y en caso de que el resto no sea 0, sustituimos el mayor de los valores por el menor, y en lugar del menor utilizamos el valor que nos ha salido en el resto. Dicho de otra forma, volvemos a aplicar el algoritmo pero ahora tomando el menor de los valores anteriores y el resto de la división efectuada. Así vamos realizando las sucesivas divisiones hasta hallar la que nos devuelve el resto 0, y el número utilizado como divisor, es el Máximo Común Divisor de los primeros dos números. Y con el sistema explicado antes es fácil encontrar el mcm. De manera que hemos encontrado otro sistema de cálculo, que no exige más que realizar sencillas operaciones matemáticas, eso sí, puede que tengamos que realizar muchas divisiones. Pero no necesitamos "pensar". Todo es muy "mecánico". De manera que en este caso también las hojas de cálculo serán unas grandes aliadas.



Llegados a este punto yo les pido que confeccionen una hoja de cálculo que les permita, ante dos números al azar (solemos trabajar con la función aleatorio) consigan encontrar el mcm y el mcd. Me gustaría que tu también, lector, te pusieses en la misma tesitura. Encuéntralo para números de 5 cifras por ejemplo. Verás como tampoco nos resulta tan sencillo

Y lo mejor de la experiencia ha sido el caso de Aitor, un alumno amigo de la ley del mínimo esfuerzo. El me demostró que había entendido muy bien los conceptos, y por "ingeniería inversa" y una sencilla Casio fx-82ES era capaz de encontrarlos en cuestión de minutos.

Como la calculadora CASIO no era sospechosa de contar con la función para calcular dichos conceptos, le reté a que me encontrase el m.c.m. y el m.c.d. le puse en dos casillas:

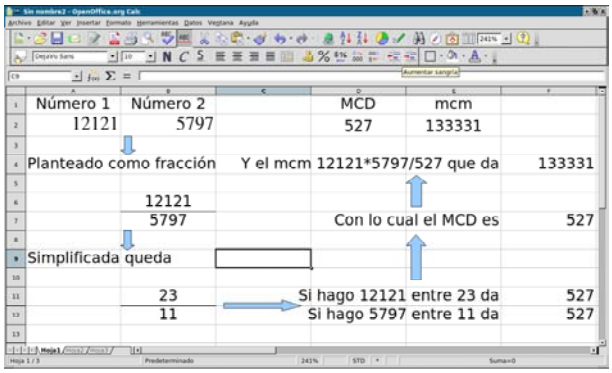
=aleatorio.entre(1;100000)

y me generó dos números 12121 y 5797

Y él, en pocos minutos me dijo que la respuesta era m.c.d. igual a 527 y el m.c.m.133331.

Pedí algunos ejemplos más y los respondió bien salvo uno que no pudo aplicar directamente su sistema. Pregunté cómo los calculaba y me dijo que escribiéndolos como fracción en la Casio, (escribía 12121/5797) la calculadora se lo simplificaba (en la pantalla mostraba al aceptar la fracción anterior 23/11). De manera que el valor por el que dividía debería ser el m.c.d. de ambos números. Entonces todo su trabajo consistía en teclear uno de los números que yo le había dado, lo dividía entre el resultando correspondiente y ya tenia el m.c.d (el tecleaba 5797/11 y sale 527 o haciendo 12121/23) Y como habíamos visto en clase, multiplicando los dos números de ejemplo y dividiendo el resultado entre el m.c.d. conseguía calcular el mínimo común múltiplo (12121*5797/527 da 133331).

Así de sencillo, y así de listo. El único problema es que la calculadora no devuelve fracciones de más de 9 cifras, de manera que cuando los números eran primos entre sí el sistema no servía. Pero entre todos le dimos la solución, primero aplicar Euclides para lograr números mas pequeños y luego utilizar el algoritmo de Aitor.



Bueno, espero que con este ejemplo se entienda cual es la filosofía del "Método Lekuona". De todas formas en

http://www.elkarrekin.org/web/goyo

tenéis muchos mas ejemplos e información para entender la forma de trabajar, y en

lekuona@gmail.com

me tenéis a vuestra disposición para intentar ayudaros en la medida de mis posibilidades.

Muchísimas gracias por vuestra atención.